ACADEMIE DE NANCY-METZ
UNIVERSITE DE NANCY II

I. C. N.

CONCOURS 1987

Régime Economique "B"
Régime Technologique "G-H"

Durée : 4 heures

***

CALCULATRICES AUTORISEES

EXERCICE :

Soit a un réel et b un réel strictement positif. Pour toute fonction f de classe C^∞ sur l'intervalle $\mathcal{J} = [a-b, a+b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on notera $f^{(n)}$ sa dérivée $n^{ième}$.

1°) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, et à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\forall x \in \mathcal{J},\ f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

2°) En notant P_n le polynôme $P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ et M_n la borne supérieure de l'image de $\mathcal{J}$ par l'application continue $x \mapsto |f^{(n)}(x)|$, montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{J},\ |f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

3°) Application numérique : on se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_{-1/4}^{1/4} e^x |Ln(1+x)|\,dx$. On prend désormais $f(x) = Ln(1+x)$, $a = 0$, $b = \frac{1}{4}$ et donc $\mathcal{J} = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$

a. Calculer $f^{(k)}(x)$ et M_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

b. Trouver un entier $n_0 > 0$ tel que : $\forall x \in \mathcal{J},\ |f(x) - P_{n_0}(x)| < 10^{-3}$
Expliciter les coefficients de P_{n_0} et étudier son signe sur $\mathcal{J}$.

c. Soit $J = \int_{-1/4}^{1/4} e^x |P_{n_0}(x)|\,dx$. Donner un majorant de $|I - J|$ sous la forme $\mathcal{J}.10^{-4}$ où $\mathcal{J} \in \mathbb{N}^*$.

d. Déterminer une primitive de $e^x P_{n_0}(x)$ sous la forme $e^x Q_{n_0}(x)$ où Q_{n_0} est un polynôme de même degré que P_{n_0}, puis donner la valeur de J arrondie à la 4ème décimale.

e. En déduire une valeur approchée de I à 10^{-3} près.

PROBLEME :

Première partie

On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles. On rappelle que si $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ sont des éléments de $\mathcal{S}$ et λ un réel, $u + v$ désigne la suite $w = (w_n)_{n\geqslant 0}$ telle que, $\forall n \geqslant 0$, $w_n = u_n + v_n$ et λu désigne la suite $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que, $\forall n \geqslant 0$, $x_n = \lambda u_n$. $(\mathcal{S}, +, .)$ est alors un espace vectoriel réel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

1°) Soit a, b, c trois réels fixés. On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire :

(E) $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+3} + a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$

Démontrer que $\mathcal{E}$ est non vide et est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

2°) On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$\forall u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{E},\ f(u) = (u_0, u_1, u_2)$

Démontrer que f est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$.

Que peut-on en conclure sur la dimension de $\mathcal{E}$?

Deuxième partie

On considère une urne contenant 3 boules de couleurs différentes. On effectue des tirages successifs avec remise. On s'arrête dès qu'on a obtenu 3 boules consécutives de la même couleur. On note X la variable aléatoire "nombre de tirages effectués", à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

1°) Soit $p_n = P(X = n)$ et $c_n = P(X \leqslant n)$ pour $n \geqslant 1$.
Bien entendu, $p_1 = p_2 = c_1 = c_2 = 0$. Que valent p_3, p_4, c_3, c_4 ? Plus généralement, que vaut c_n en fonction des p_k, $k \leqslant n$?

2°) Démontrer que, $\forall n \geqslant 1$, $p_{n+3} = \frac{2}{27}(1 - c_n)$. En déduire que,

$\forall n \geqslant 2$, $p_{n+3} - p_{n+2} + \frac{2}{27} p_n = 0$

3°) a. Vérifier que le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 + \frac{2}{27}$ peut se mettre sous la forme $(x - \frac{1}{3}) Q(x)$ où Q est un polynôme du second degré dont on calculera les 2 racines réelles λ_1 et λ_2. On notera $\lambda_3 = \frac{1}{3}$.

b. Démontrer que les 3 suites $(\lambda_1^n)_{n\geqslant 0}$, $(\lambda_2^n)_{n\geqslant 0}$, et $(\lambda_3^n)_{n\geqslant 0}$ sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{S}$ et sont solution de l'équation :

(E') $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+3} - u_{n+2} + \frac{2}{27} u_n = 0$.

c. A l'aide des résultats de la première partie, montrer l'existence de 3 constantes réelles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, telles que :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad P_n = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \lambda_i^{n+2}$$

Donner les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

4°) a. Calculer c_n pour tout $n \geqslant 2$. Vérifier que c_n a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$.

b. Calculer l'espérance de X. Vérifier que $EX \in \mathbb{N}^*$.